

La construcción de la racionalidad y
las situaciones de Incertidumbre:
qué consecuencias para la
Didáctica?

Gérard Vergnaud

Incertidumbre de la acción y de la anticipación

- **Situaciones aleatorias:** no podemos predecir los acontecimientos singulares.
- **Situaciones regulares:** podemos prever los acontecimientos singulares pero no tenemos acceso a los procesos.
- **Situaciones necesarias:** podemos prever y tenemos acceso, pero no disponemos de todas las categorías conceptuales para tomar la información pertinente y decidir.

Ejemplos prototipicos

Aleatorio la lotería, la meteorología

Regular estaciones, mareas, ciclos lunares

Necesario orientacion, volumen, geometría euclídea

Experimentación con los sujetos

ALEATORIAS

- dos lámparas se encienden según la ley dos veces la lámpara verde y una vez la lámpara roja.

Resultado: los sujetos se ajustan progresivamente a la proporción 2 cada 3 y 1 cada 3 , aunque ellos tengan interés en predecir siempre « verde »

REGULARES

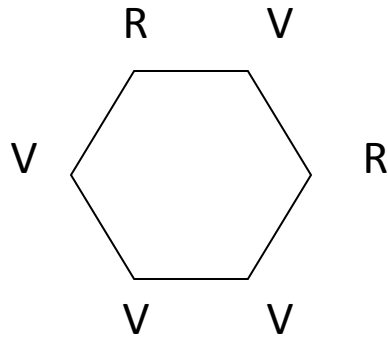
- Dos ejemplos

RV**V**R**V**V**R**V**V**...

RV**R**V**V**V**R**V**R**V**V**V**R**V**R**V**V**...

La construcción de la racionalidad

Necesaria



Una fuente importante de incertidumbre:

La posible interferencia de la acción de otro o de determinantes exteriores con la propia acción del sujeto

- Situaciones productivas: solo la acción propia del sujeto determina los efectos y las variaciones
- Situaciones pasivas: la acción propia no tiene efecto, los únicos determinantes son exteriores
- Situaciones interactivas: las variaciones dependen a la vez de determinantes exteriores y de la propia acción

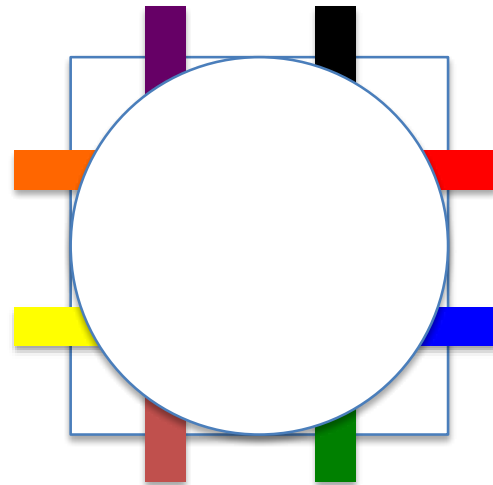
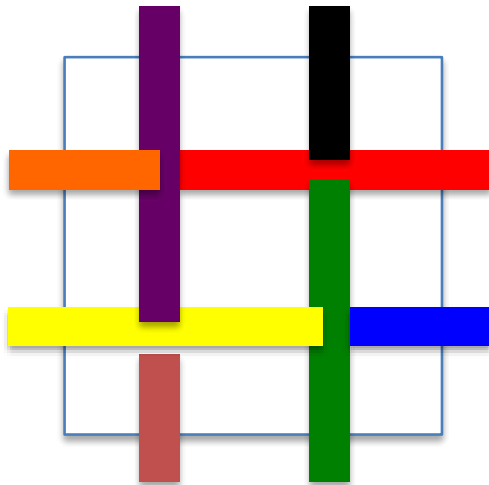
- La incertidumbre debida a otro podría ser confundida con las tres categorías principales vistas mas arriba;
- Una aproximación desarrollista de la racionalidad conduce a no confundirlos.
- De allí la tabla siguiente y la tesis de que la racionalidad se desarrolla primero en las situaciones necesarias y productivas

	Nécessaires	Régulièr e s	Aléatoires
Productives	X		
Passives			
Interactives			Teoría de juegos

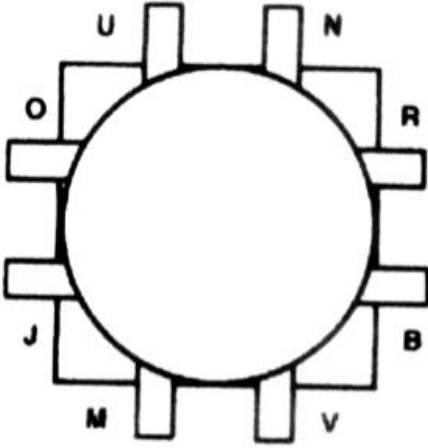
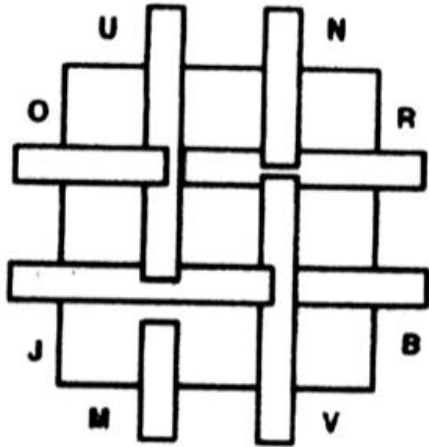
La construcción de la racionalidad

- El primer campo de experiencia del bebé y del niño pequeño que es del orden de lo necesario y productivo es el espacio.
- Es también un campo de experiencia esencial para el adulto. De allí probablemente, la importancia de la geometría en la historia de las ciencias, como dominio y como fuente de modelos.
- Quedémonos en el bebé y en las situaciones que pueden dar forma a sus primeras representaciones calculables
 - Primer conjunto de situaciones: los desplazamientos y las posiciones del sujeto en un espacio circunscripto
 - Segundo conjunto : la manipulación de los objetos materiales que tienen ciertas propiedades

Una ilustración de la construcción de lo necesario



La construcción de la racionalidad



La lenta construcción de la racionalidad

- **Caja negra** tirar la roja después al azar ...
- **Orden espacial** tirar la roja después la marrón, después la verde ...
- **Conexidad** tirar la roja, después la negra, después la roja, verde, roja, verde ...
- **Anti simetría de la relación** tirar la roja, verde, después azul, naranja, violeta... y recomenzar
- **Transitividad de la regla**
« para tirar X tirar Y ; para tirar Y tirar Z. Entonces para tirar X tirar Z »
examinar el dispositivo ; tirar negra, después en orden violeta, naranja, azul, verde, rojo.

Algoritmos y esquemas

Un esquema tiene necesariamente cuatro categorías de componentes:

- una meta (o varias), sub-metas y anticipaciones
- reglas de acción , de toma de información y de control
- invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto)
- posibilidades de inferencia

Número y magnitud

- Sin el concepto de número, uno no comprendería sino pocas cosas sobre el concepto de magnitud
- Pero sin la experiencia de las cantidades de los objetos ordinarios discretos y las magnitudes físicas, especialmente la espaciales, no habría concepto de número.
- La experiencia de número comienza con la de magnitud.

- No pensamos bien las magnitudes sólo con el concepto de número
- La estructura de grupo (grupo de los enteros relativos, de los números racionales, etc.) ha captado la atención de los didactas y de los científicos desde el siglo XIX ; al punto de enmascarar la importancia del análisis dimensional y de la estructura vectorial.

El ejemplo de las estructuras multiplicativas

- Las estructuras multiplicativas forman una red de situaciones y de conceptos, esencial para el análisis de la matemática y de la física.
- Esencial también para analizar la larga duración del desarrollo de su comprensión en los alumnos de la escuela elemental, del secundario y más allá.
- Es uno de los mejores ejemplos de « campo conceptual »

La proporción simple

- No sorprende que las primeras situaciones comprendidas por los alumnos sean las situaciones de proporción simple, en las cuales es necesario realizar una multiplicación, con pequeños números enteros
- Por ejemplo en un reparto de bombones entre 4 alumnos, a razón de 6 a cada uno; cuántos bombones en total hacen falta?
- O bien si 4 kg de peras se compran a 6 euros el kg; cuál es el costo total ?

Las dos divisiones y su diferencia

- **Jeanne compra 4 kg de peras pour 24 euros. Cuál es el precio de un kg ?**
- La division por 4 corresponde a la inferencia: el precio de un kg, es 4 veces menos que el precio de 4 kg
- Se aplica a una cantidad de dinero un operador escalar (sin dimension: 4 veces menos). Se obtiene una suma de dinero .
- **Robert quiere comprar peras a 6 euros el kg. El tiene 24 euros; cuantos kg puede comprar?**
- La division de 24 por 6 corresponde a la inversión del coeficiente de proporcionalidad, y a su aplicación a una cantidad de dinero:
- Obtengo los kg porque yo divido por un cociente de dimensiones:
- 24 euros, dividido por « 6 euros por kg »

Conséquence théorique

- No se tiene solo un asunto de números sino de vectores (números afectados por una dimensión)
- Esto llama al inicio de un análisis dimensional, por medio por ejemplo de una representación gráfica que realiza la parte de las magnitudes diferentes y de las operaciones-relaciones diferentes: vertical en el primer caso, horizontal en el otro con un cambio de magnitud entre la partida y la llegada

División		Cuotación	
kg	€	kg	€
1	x	1	6
4	24	x	24

Otra dificultad:

la extensión a los números decimales menores que 1

285 kg de corcho a 0,70 euros el kg

Para calcular el costo total, hay que hacer una multiplicación o una división ?

0,70 toneladas de hormigón a 285 euros la tonelada

Para calcular el costo total, hay que hacer una multiplicación o una división?

Análisis conceptual de los dos casos

- La elección de la operación correcta puede ser contrariada por el carácter cruzado de la función

1	0,70
285	coût

- Escalar mas grande que 1 $285 > 1$ $f(285) > f(1)$

1	285
0,7	coût

- Escalar más pequeño que 1 $0,7 < 1$ $f(0,7) < f(1)$

Comentarios teóricos

- No siempre es verdadero que la multiplicación haga más grande y la división más pequeña
- No es evidente que la multiplicación sea conmutativa mientras se tienen en cuenta las dimensiones
- Los operadores son a veces escalares, a veces cocientes de dimensiones .

Otro ejemplo con mas cantidad de datos

Monsieur Félix es un empresario que quiere evaluar los costos de fabricación; los tiempos de fabricación y la mano de obra necesarias para cimientos en hormigón armado, antes de someter una propuesta para una obra de 25 casas; 12 F4, 8 F5, 5 F6, cuyas características se dan en el cuadro siguiente:

	Superficie habitable	Superficie de influencia	cimiento
F4	75 m ²	84,3m ²	45,1 m
F5	84 m ²	94, 6 m ²	48,7 m
F6	103 m ²	115, 24 m ²	55, 9 m

Primeros datos

Los cimientos deben tener una sección de 25 X 50 (en cm). El hormigón tendrá el dosaje siguiente :

Para 1 m³ de hormigón 250 Kg de cemento
 580 Kg de arena
 1500 kg de grava

Los precios son respectivamente

25 F les 50 kg de cemento
40 F la tonelada de arena
43 F la tonelada e grava

Escriban un conjunto de preguntas utilizando los datos que ustedes disponen . Escriban todas sus preguntas en palabras y no hagan ningún cálculo.

Ejemplos de preguntas realizadas por los alumnos

H longitud de cimiento con un metro cúbico de hormigón?

C precio de un metro cúbico de hormigón?

G cuanto cemento por una tonelada (1000 kg) de arena?

D cuanto cemento hay que encargar en total?

E -----arena -----?

F -----grava -----?

Tabla de datos y preguntas

Cimiento	hormigón	Cemento	Arena	grava
		50		
				1000
H	1	250	580	1500
			G	1000
385		D	E	F

Cemento	arena	grava	hormigón
25			
		43	
			C
		40	

Nuevos datos para continuar la actividad

El Señor Félix evalúa el costo medio de las armaduras para un metro cúbico de hormigón.

Para la mano de obra, el se apoya en el hecho de que , en promedio, dos obreros fabrican 18 metros lineales de cimiento en una jornada de 8 horas ; colocación del encofrado, los armazones, del hormigón, el levantamiento del encofrado etc. La mano de obra deviene ; con las cargas sociales, a un costo por hora de 48 francos.

Escriban , sin hacer cálculos, las nuevas preguntas que podemos hacernos .

**Qué magnitudes podemos introducir en la tabla anterior ?
Qué magnitudes requiere otro tipo de tabla ?**

Nuevas preguntas

- U** Longitud de cimiento por obrero y por día ?
valor unitario $F(1,1)$
- N** Cuántos obreros para fabrican 130 m de cimiento en 5 días?
- S** Cuánto cimiento en 5 días, con 10 obreros ?
- T** Cuántos días para 1400 m, con 10 obreros ?

Tabla para una función de dos variables

	obreros				
días	1	2	N	7	10
1	U				
5		70	130		S
T					1400
12				Q	

Teoremas en acto desarrollados espontáneamente
por los alumnos en el desarrollo de la actividad

Las propiedades de isomorfismo de la función lineal

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$

$$f(ax) = af(x)$$

$$f(ax + a'x') = af(x) + a'f(x')$$

el coeficiente de proporcionalidad

$$f(x) = kx$$

Otros teoremas en acto interesantes

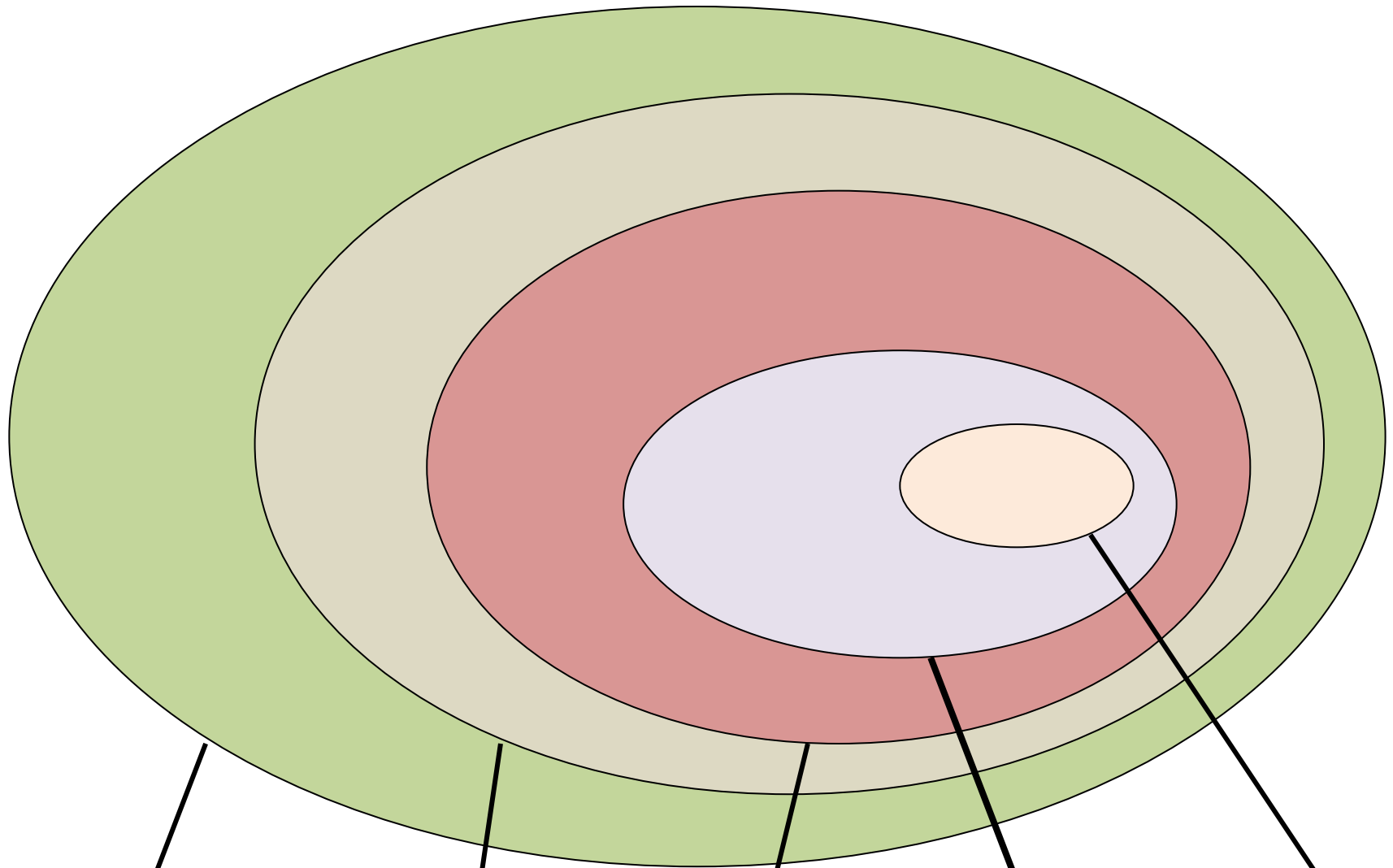
El producto cruzado y la regla de tres

$$x' * f(x) = x * f(x')$$

$$f(x') = x' * f(x) / x$$

la doble linealidad

$$f(n_1 x_1, n_2 x_2) = n_1 n_2 f(x_1, x_2)$$



Invariantes operatorios

Concientes

Explicitables

Explicitos

Saberes formalizados

La solución espontánea de un niño

Los niños preparan su estadía en la semana de la nieve y calculan los productos alimenticios que hay que prever. Para el azúcar, hay que contar 3,5 kg de azúcar para 10 niños para 7 días.

Hay 50 niños y la estancia es de 28 días.
¿ Cuánto hace falta de azúcar?

Un joven estudiante de CM2 (ultimo año de la escuela elemental) interviene entonces y dice : 5 veces mas, 4 veces mas eso hace 20 veces mas

Como representar este razonamiento?

La formula es un método exacto; pero ella es comprensible por los niños de 10 años ?

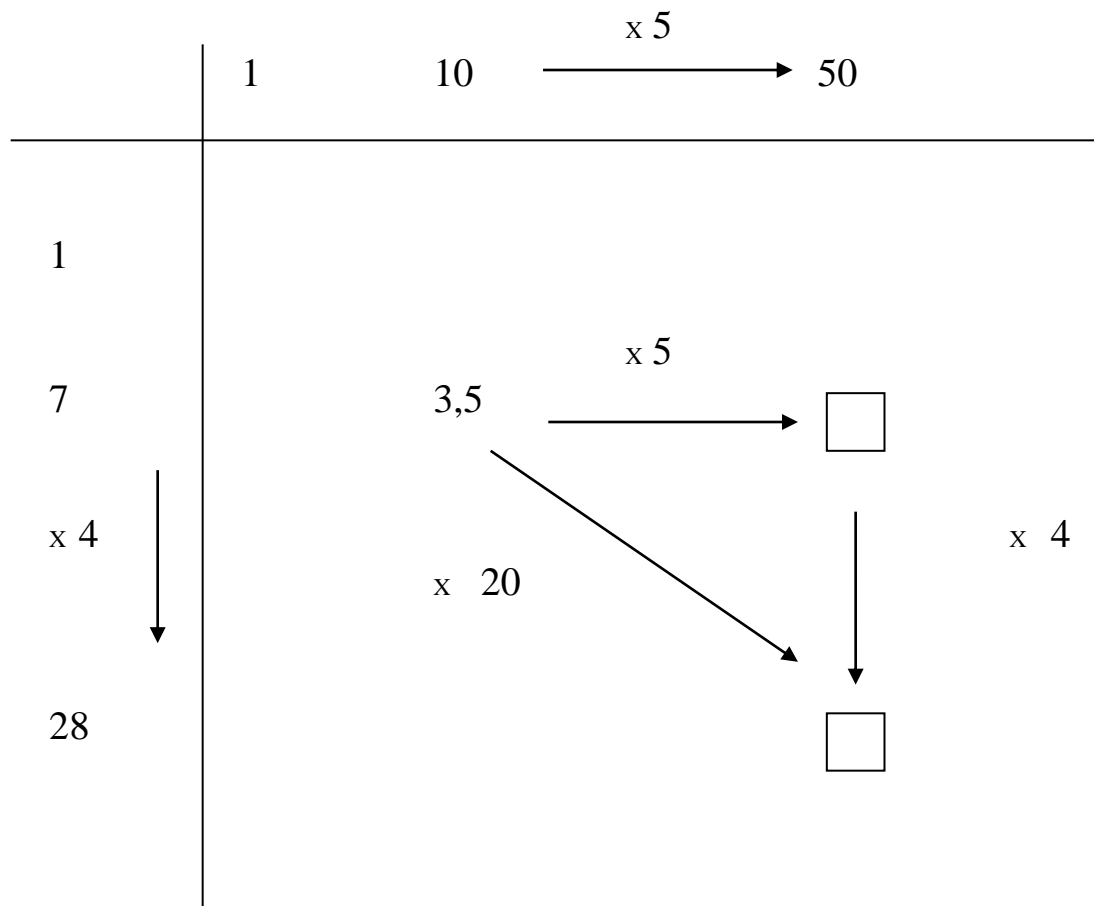
$$A = k N.D, \text{ siendo } k = 5.4$$

5 veces mas personas

4 veces más de días

Se puede proponer otra (diapositiva siguiente)

Representación gráfica de la doble proporcionalidad



El ejemplo elemental del recuento

El esquema elemental

correspondencia biunivoca

cardinal

En el estadio de Nantes

División $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

Escritura $\text{Escribe}(\text{suma}) = \text{Escribe}(a) +++ \text{Escribe}(b)$

+++ algoritmo de la suma

Bloque rectangular $\text{Card}(R \times S) = \text{Card}(R) * \text{Card}(S)$

X producto cartesiano * multiplicacion aritmética

Lugar del estadio

$\text{Media} = (\text{N max} + \text{N min}) / 2$

Gracias!